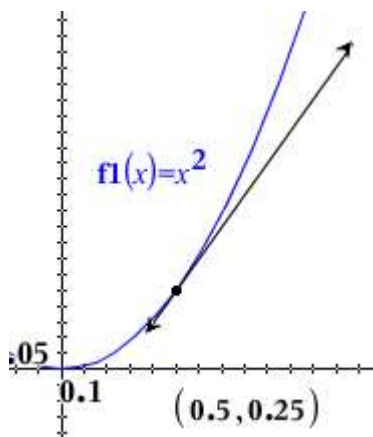


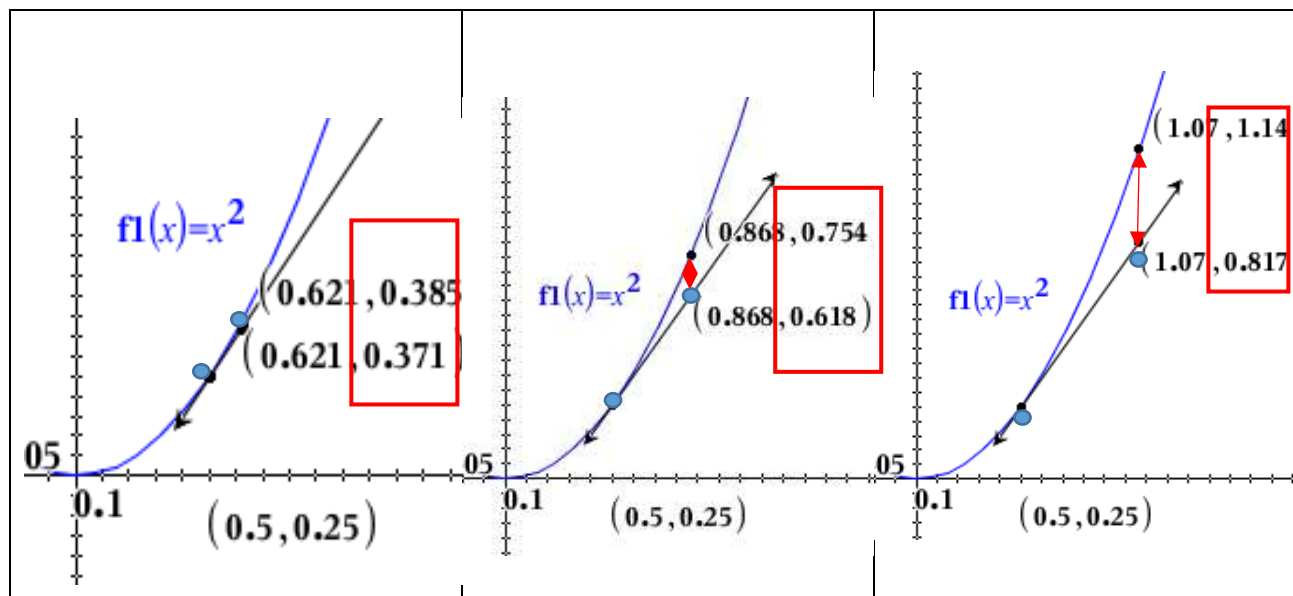
Tangenten - som vejviser

Tangentens hældning kaldes differentialkvotienten. Tangenten angiver en retning for grafens videre forløb, hvilket betyder, at man kan bruge tangenten som en slags 'vejviser' for grafen et stykke frem.

På grafen for funktionen $f(x) = x^2$ nedenfor er indtegnet tangenten i røringspunktet $(0,5; 0,25)$.

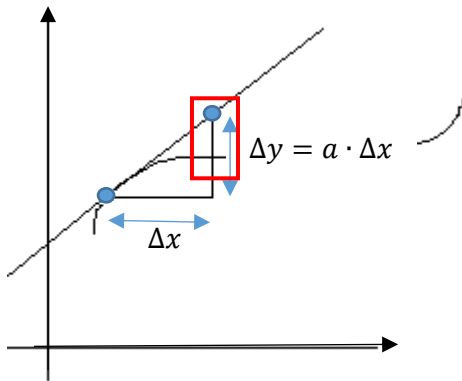


På tegneserien nedenfor kan man aflæse forskellen mellem et punkt på parabelen og et punkt med *samme* x-koordinat på tangenten og konstatere, at forskellen er 'lille', hvis punktet ligger 'tæt' på tangentens røringspunkt, og 'stor', hvis punktet ligger 'langt' fra røringspunktet.



Det betyder altså, at tangentlinjen er en god tilnærmelse til grafen 'tæt' på røringspunktet, og at den 'langt' fra røringspunktet bliver en dårligere og dårligere tilnærmelse.

Hvis x vokser med Δx , vil y -koordinaten for punktet på tangenten vokse med $\Delta y = a \cdot \Delta x$. Det er dermed Δx , der skal vælges 'tilpas' lille, hvis tilnærmelse med tangenten skal virke.



Kender man en formel for tangentens hældning *alle* steder i planen kaldes denne ligning en første ordens differentialligning.

Eksempel 1

Differentialligning 1: $y' = 2 \cdot x$, hvor symbolet y' angiver tangentens hældning og udtales 'y mærke'.

Differentialligningen angiver, at tangenshældningen *alle* steder i planen er det dobbelte af røringspunktets x -koordinat.

At løse differentialligningen betyder at finde den funktion, hvis graf *alle* steder har tangenthældning lig med det dobbelte af x -koordinaten for røringspunktet.

Denne disciplin kaldes i matematik 'at løse en differentialligning' og er et meget vigtigt emne med stort anvendelsesområde.

Imidlertid kan vi med ideen om tangenten som 'vejviser' finde tilnærmede løsninger til differentialligninger.

Lad os prøve:

Udgangspunkt: $P_0(0,0)$

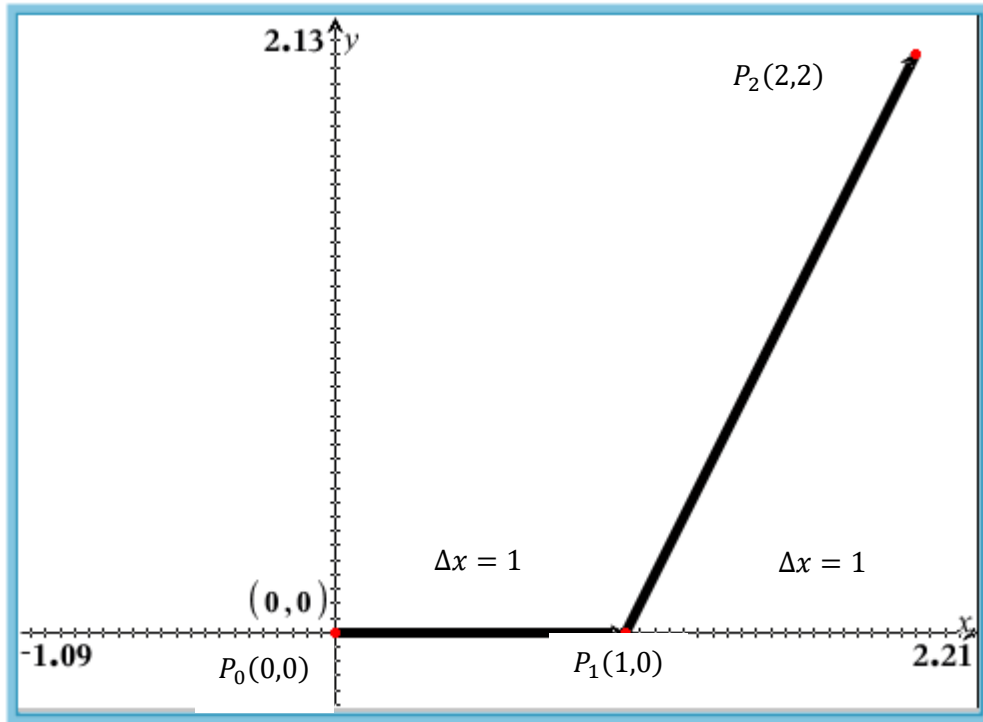
1.trin: Tangentens hældning i punkt $P_0(0,0)$ er: $y' = 2 \cdot 0 = 0$, altså en vandret tangent.

Nu beslutter vi at gå $\Delta x = 1$ frem langs tangenten. Dermed kommer man til punktet $(0 + 1, 0 + 0 \cdot 1) = (1,0)$.

Dette punkt kaldes $P_1(1,0)$, og de to punkter forbindes med et linjestykke.

I punkt $P_1(1,0)$ beregnes igen tangentens hældning $y' = 2 \cdot 1 = 2$, og igen går man $\Delta x = 1$ frem langs tangenten.

Dermed kommer man til punktet $(1 + 1, 0 + 2 \cdot 1) = (2, 2)$.



Opgave 1

- 1) Fortsæt et skridt mere og bestem punkt : $P_2(x, y)$
- 2) Gentag 'gåturen' fra startpunktet $P_0(0,0)$ med $\Delta x = 0,5$ langs tangenten.

Løsningen til differentialligningen $y' = 2 \cdot x$ med start i $P_0(0,0)$ er $f(x) = x^2$

- 3) Indtegn punkterne fra først og anden 'gåtur' langs tangenterne sammen med løsningskurven $y = x^2$
- 4) Kommentér forskelle.

Opgave 2

Differentialligning 2: $y' = -1,5 \cdot x^2 + 1$ med udgangspunkt: $P_0(-3; 14,5)$

- 1) Beregn en tilnærmelse til løsningskurven ved tangentmetoden med $\Delta x = 1$ og 8 skridt.
- 2) Gentag beregningen med $\Delta x = 0,5$ og 16 skridt.

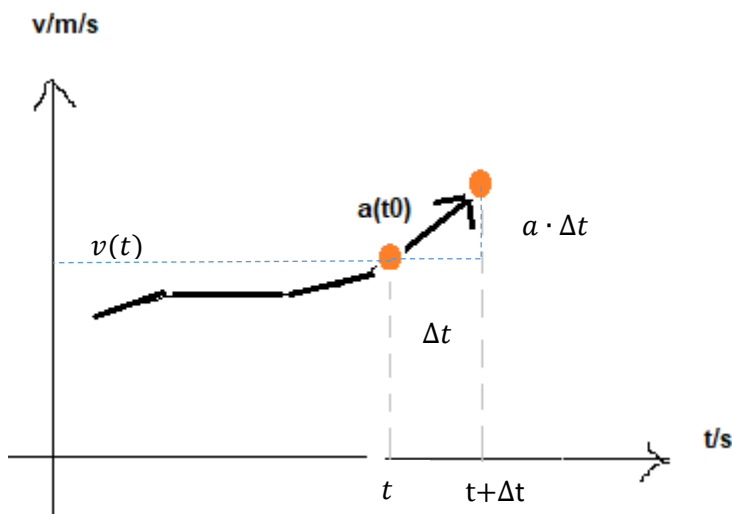
Løsningen til differentialligningen $y' = -1,5 \cdot x^2 + 1$ med udgangspunkt: $P_0(-3; 14,5)$ er $f(x) = -0,5 \cdot x^3 + x + 4$

- 3) Indtegn punkterne fra først og anden 'gåtur' langs tangenterne sammen med løsningskurven $y = -0,5 \cdot x^3 + x + 4$
- 4) Kommentér forskelle.

Differentialligninger i fysik

Udgangspunktet i mekanik er ofte Newtons 2.lov: $F_{res} = m \cdot a$, hvor accelerationen er lig med tangentens hældning på grafen for hastigheden $v(t)$. Det betyder, at hvis man kender den resulterende kraft F_{res} , kan accelerationen beregnes $\frac{F_{res}}{m} = a$ og dernæst med tangenten som 'vejviser', en ny hastighed et 'øjeblik' senere bestemmes.

På denne måde kan hastigheden beregnes til alle (fremtidige) tider alene ud fra en kraftanalyse. Med kendskab til hastigheden kan banekurven optegnes (Se senere).



Udgangspunktet er derfor nu en (start-)hastighed $v(t)$, hvor argumentet er et klokkeslæt t .

Dernæst udregnes accelerationen fra ligningen $\frac{F_{res}}{m} = a$, og man 'flytter' sig et tidsinterval Δt langs tangenten med hældning a . Dermed ændres hastigheden med størrelsen $\Delta v = a \cdot \Delta t$, og den nye hastighed er: $v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v \cong v(t) + a \cdot \Delta t$

Opgave

Lad $a = g = -9,82 \frac{m}{s^2}$

- 5) Bestem hastigheden $v(t)$ med tidsintervaller på $\Delta t = 1s$ for $t \in [0,5]$ og starthastighed $v(0) = 0 \text{ m/s}$
- 6) Hvilken type bevægelse beskrives med differentialligningen?

MV PK